2007 年度入学試験問題

数　　学

（試験時間　13：30～15：10　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ～Ⅳまで 4 題あります。そのうち 3 題を選択して解答してください。
選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を記入してください。
（○の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）
なお，4 題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効とします。

（記入例）

Ⅰ．	選　択	○

3．解答は，必ず解答欄に記入してください。なお，解答欄以外に書くと無効となりますので注意してください。

4．解答は，鉛筆またはシャープペンシル（いずれもＨＢ・黒）を使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙には，受験番号と氏名を 2 か所記入してください。

I　a は定数とする。関数 $f(x) = -\sin x \cos x + a\sin x + (2a-1)x$ について，次の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ が $0 < x < \pi$ において極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(3)　$y = f(x)$ のグラフが $0 < x < \pi$ の範囲に変曲点をもち，その変曲点における接線の傾きが 1 であるように，定数 a の値を定めよ。

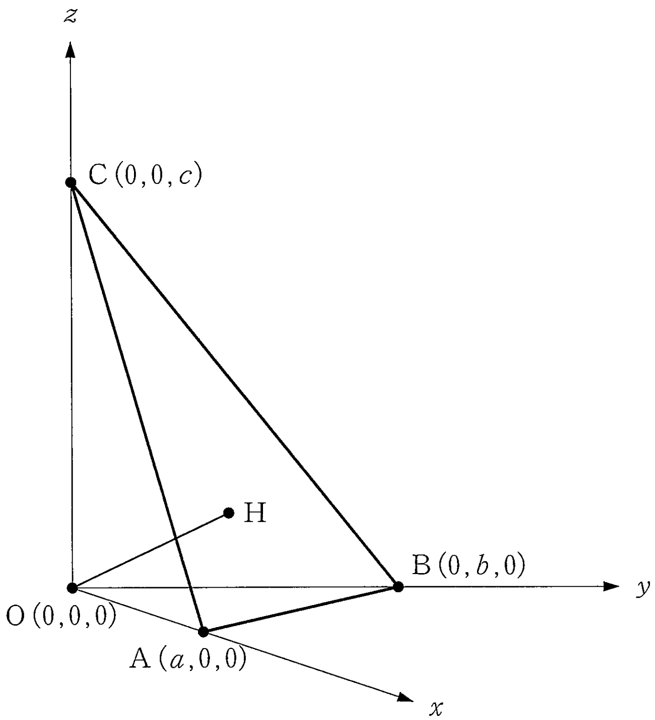
II　座標空間内に 3 点 A$(a,0,0)$，B$(0,b,0)$，C$(0,0,c)$ がある。このとき，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は正の数である。(50 点)

(1)　△ABC は鋭角三角形であることを証明せよ。

(2)　原点 O$(0,0,0)$ と点 P$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$ を通る直線は，△ABC を含む平面と直交することを示せ。

(3)　原点 O から△ABC へ下ろした垂線の足を H とする。3 点 O，C，H を含む平面は，辺 AB と直交することを示せ。

(4)　点 H は△ABC の垂心であることを証明し，H の座標を求めよ。



III　$f(x)=\int_0^x (x-t)te^{-2t}dt\ \ (x>0)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。(50 点)

(1)　$0 < f(x) < \int_0^x (x-t)t\,dt$ であることを示せ。また，このことを用いて，

$0 < f(x^2) < \dfrac{x^6}{6}$ であることを示せ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

(3)　(1)と(2)を用いて，$x>0$ のとき，

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} < e^{-2x^2} < \frac{1-x^2+\frac{2}{3}x^6}{1+x^2}$$

が成り立つことを示せ。

(4)　次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\pi}{2}-1 < \int_0^1 e^{-2x^2}dx$$

IV　xy 平面上の半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を S と表す。x 軸の $0<x<1$ の部分と S との両方に接する円の中心が (a, b) のとき，その円を C_a と表す。x 軸の $x>1$ の部分と S との両方に接する円の中心が (A, B) のとき，その円を C'_A と表す。さらに，図に示すように，2 つの円 C_a $(0<a<1)$ と C'_A $(A>1)$ とが互いに接しているとする。このとき，次の問いに答えよ。(50 点)

(1)　b を a の式で表し，B を A の式で表せ。

(2)　A を a の式で表せ。

(3)　C_a と C'_A の接点におけるこれらの円の共通接線と，x 軸との交点を P_a とし，円 C'_A の中心を Q_a とするとき，$\mathrm{P}_a\mathrm{Q}_a$ を a の式で表せ。

(4)　線分 $\mathrm{P}_a\mathrm{Q}_a$ と円 C'_A との交点を R_a とするとき，$\displaystyle\lim_{a \to 0} \mathrm{P}_a\mathrm{R}_a$ の値を求めよ。